LEMBAR KERJA MAHASISWA

(LKM)

MATA KULIAH: PENGANTAR ILMU PELUANG
Dosen Pengampu: Dra Ni Luh Putu Suciptawati,M.Si

NAMA	:
NIM	:

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS UDAYANA
2017

KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga Lembar Kerja Mahasiswa(LKM) mata kuliah Pengantar Ilmu Peluang dapat terselesaikan. LKM ini disusun sebagai suplemen latihan-latihan soal yang terstruktur sehingga dapat digunakan mahassiwa untuk lebih memahami mata kuliah PIP.

Melalui kesempatan ini tidak lupa penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada pihak-pihak yang secara langsung maupun tidak langsung telah membatu dalam penyelesaian makalah ini.

Penulis menyadari masih terdapat kekurangan dalam penyusunan LKM ini. Oleh karena itu, segala saran dan kritik yang membangun sangat kami harapkan. Akhir kata penulis berharap semoga LKM ini dapat bermanfaat bagi semua mahasiwa

Denpasar, 13 Desember 2017

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

BAB 1

PENGANTAR PELUANG

STANDAR KOMPETENSI:

Setelah mempelajari dan mengerjakan latihan-latihan yang ada pada bahan belajar mandiri ini, anda diharapkan dapat:

1. Menyebutkan arti percobaan, ruang sampel, kejadian, dan titik sampel.
2. Menentukan ruang sampel dari suatu percobaan.
3. Menentukan banyak kejadian tertentu dari suatu percobaan.
4. Menentukan banyak titik sampel dari suatu percobaan.
5. Menentukan permutasi dari suatu percobaan.
6. Menentukan kombinasi dari suatu percobaan.
7. Menghitung peluang suatu kejadian

1.1. RUANG SAMPEL

Sebelum membahas pengertian ruang sampel kita pelajari terlebih dahulu apa yang dimaksud dengan percobaan acak. Percobaan acak (*random experiment*) adalah suatu percobaan di mana ketika percobaan tersebut diulang maka hasilnya belum tentu sama dengan hasil dari percobaan sebelumnya. Contoh percobaan acak : pelemparan dadu sekali, pelemparan koin.

Himpunan yang beranggotakan seluruh kemungkinan hasil dari sebuah percobaan acak disebut dengan Ruang Sampel, sedangkan anggota ruang sampel disebut dengan titik sampel. Secara umum ruang sampel disimbulkan dengan symbol S. Pada ilustrasi pelemparan sebuah dadu 1 kali, maka ruang sampel dari percobaan acak tersebut adalah $S = \{1, 2,3,4,5,6\}$.Angka 1 merupakan salah satu titik sampel

Pada setiap percobaan, kita dapat mengamati suatu kejadian tertentu. Dalam hal ini Kejadian merupakan himpunan bagian dari ruang sampel S. Jika kejadian itu hanya memuat satu titik sampel pada ruang sampel, maka kejadian itu disebut kejadian sederhana. Jika kejadian itu merupakan gabungan dari kejadian-kejadian sederhana, maka kejadian itu disebut kejadian majemuk. Pada kasus pelemparan sebuah dadu 1 kali , jika kita hanya tertarik pada munculnya angka ganjil maka kejadian yang dimaksud adalah E = □1, 3,,5,□□

Sifat-sifat kejadian:

- Bila E_1 dan E_2 masing-masing melambangkan 2 kejadian pada 2 ruang sampel, maka $E_1 \cup E_2$ merupakan gabungan dua kejadian yang mengandung semua unsur persekutuan E_1 dan E_2
- Kejadian E_1 dan E_2 dikatakan kejadian yang saling terpisah (*mutually exclusive*) jika $E_1 \cap E_2 = \emptyset$; artinya E_1 dan E_2 tidak memiliki unsur persekutuan
- Kejadian E_1 dan E_2 dikataan kejadian yang beririsan jika $E_1 \cap E_2 = E_3$ di mana E_3 merupakan irisan dari 2 kejadian tersebut dengan jumlah anggota pada ruang sampelnya $n(E_1 \cap E_2)$

LEMBAR KERJA MAHASISWA 1.1 :

1. Seorang anak membawa dua buah dadu, kedua dadu dilempar bersamaan maka Percobaan acak adalah ……………………………………………………………………….., Ruang sampel dari percobaan acak tersebut adalah ……………………………………………… Anak tersebut tertarik pada kejadian jumlah angka yang muncul dari kedua dadu tersebut merupakan angka genap jika kejadian tersebut dinyatakan dengan E maka E adalah ……………………………………, kemudian adik anak tersebut datang dan bertanya pada si kakak, apakah mungkin jumlah angka yang muncul dari kedua dadu tersebut berjumlah 10?. Kejadian jumlah angka yang muncul=10 dinyatakan dengan F, maka F=…………………………………….. Apakah ada kejadian yang memenuhi kejadian E dan F sekaligus?, jika ada sebutkan titik-titik sampelnya.
2. Adi menarik sebuah kartu dari dari kelompok 52 kartu bridge dan terjadinya kejadian adalah sebagai beriku:A: kartu yang ditarik berwarna merah, B: kartu yang ditarik jack, queen, atau king diamond. C: kartu yang ditarik As. Titik sampel persekutuan A dan C adalah …. , titik sampel persekutuan anatar A dan B adalah ……

1.2. Menghitung Titik Sampel

Dalam banyak kasus suatu peluang dapat diselesaikan dengan mengitung jumlah titik sampel dalam ruang sampel yang terjadi. Patokan dasar dalam mencacah dinyatakan sbb

Aturan Perkalian Jika suatu operasi dapat dilakukan dengan n_1 cara, dan jika untuk setiap cara ini operasi ke dua dapat dikerjakan dengan n_2 cara, maka kedua operasi itu dapat dikerjakan bersama-sama dengan n_1n_2 cara.

Jika suatu operasi dapat dilakukan dengan n_1 cara, dan jika untuk setiap cara ini operasi ke dua dapat dikerjakan dengan n_2 cara, jika untuk setiap cara ini operasi ke tiga dapat dikerjakan dengan $n_{3,}$ dan seterusnya, maka deretan k operasi dapat

Contoh berikut menunjukkan penggunaan aturan perkalian:

- Banyak titik sampel dalam ruang sampel jika sebuah dadu dilempar sekali adalah 36

Sering kali dalam melakukan percobaan kita menginginkan ruang sampel yang unsurnya terdiri dari semua susunan yang mungkin dari sekelompok benda tertentu. Misalnya ingin diketahui banyaknya susunan yang dapat dibuat jika 4 orang duduk mengelilingi meja makan. Urutan-urutan yang berlainan tersebut disebut dengan **permutasi.**

Permutasi adalah suatu susunan yang dapat dibentuk dari suatu kumpulan benda yang diambil sebagian atau seluruhnya.

Banyak permutasi n benda berlainan adalah n!

Banyak permutasi n benda berlainan yang disusun secara melingkar/siklis adalah (n – 1)!

Jika n benda berlainan diambil r sekaligus maka dapat disusun dalam n . (n – 1) . (n – 2) . ……. . (n – r) cara; dan perkalian ini ditulis dengan lambang,

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh permutasi:

- Suatu kelompok belajar yang beranggotakan 4 orang (P, Q, R dan S) akan memilih ketua dan wakil ketua kelompok. Ada berapa alternatif susunan ketua dan wakil ketua dapat dipilih ?

Jawab:permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan permutasi yaitu: P(4,2)= 4!/(4-2)!= 12 cara

Perhatikan kembali jika ada 2 buah unsur A dan B maka permutasinya ada 2, yaitu terdiri dari AB dan BA. Jika ada 3 buah unsur A, B, C dengan pengambilan 2 buah unsur sekaligus, maka permutasinya ada 6, yaitu terdiri dari AB, BA, AC, CA, BC, CB. Dalam hal ini, AB berbeda dengan BA, AC berbeda dengan CA, dan seterusnya. Bagaimana jika AB dan BA dianggap sama, begitu pula AC dan CA dianggap sama, dan seterusnya? Dalam hal unsur-unsurnya tidak memperhatikan urutannya, seperti kasus di atas, disebut *kombinasi*.

Kombinasi r elemen dari *n* elemen adalah :

jumlah pemilihan yang tidak terurut *r* elemen yang diambil dari *n* buah elemen

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Contoh kombinasi

- Suatu warna tertentu dibentuk dari campuran 3 warna yang berbeda. Jika terdapat 4 warna, yaitu Merah, Kuning, Hitam dan Hijau, maka berapa kombinasi tiga jenis warna yang dihasilkan.

Jawab; dalam hal ini campuran warna merah,kuning, hijau akan sama saja dengan campuran kuning, merah,hijau walaupun urutannya berbeda sehingga masalah ini merupakan kombinasi

$$C(4,3) == \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!.1!} = 4$$

- Jika ada 4 wanita dan 6 pria. Carilah banyak panitia 4 orang yang dapat dibuat yang beranggotakan 2 wanita dan 2 pria.

Jawab.

Banyaknya cara memilih 2 dari 4 wanita adalah C(4,2)= $\frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!.2!} = 6$

Dengan cara yang sama banyaknya cara memilih 2 dari 4 pria adalah C(6,2)= $\frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!.4!} = 15$

Jadi banyaknya panitia yang dapat dibentuk yang beranggotakan 2 wanita dan 2 pria adalah 6 .15=90

LEMBAR KERJA MAHASISWA 1.2 :

1. Menjelang Pergantian kepengurusan HIMATIKA UNUD akan dibentuk panitia inti sebanyak 4 orang (terdiri dari ketua , wakil ketua, bendahara dan sekretaris), Ada 10 orang mahasiswa masuk nominasi untuk menjadianggota panitia inti. banyaknya pasangan calon yang dapat duduk sebagai panitia inti tersebut …………….
2. Bila suatu percobaan terdiri atas pelemparan sebuah dadu dan kemudian mengambil satu hurup dari 26 alfabet, maka banyaknya titik sampel adalah….
3. Dalam sebuah kantong terdapat 7 kelereng maka banyak cara mengambil 4 kelereng dari kantong tersebut adalah …..
4. Seorang peternak akan membeli 3 ekor kambing dan 5 ekor sapi dari seorang pedagang yang memiliki 6 ekor kambing dan 14 ekor sapi. Banyak cara memilih kambing ……., Banyak cara memilih sapi……. Sehingga peternak tersebut memiliki pilihan sebanyak ….. …

1.3 Peluang suatu kejadian

Konsep peluang dapat dinyatakan berdasarkanberdasarkan pendekatan klasik dan non klasik

- **Pendekatan klasik**

Jika S menyatakan ruang sampel dari percobaan acak, E menyatakan kejadian yang diinginkan serta n(S) dan n(E) masing-masing menyatakan jumlah elemen himpunan S dan E, maka menurut pendekatan klasik peluang dari E dinyatakan dalam notasi P(E) adalah

P(E)=n(E)/n(S)

- **Pendekatan Non klasik**

pada konsepsi peluang didasarkan pada pendapat bahwa peluang suatu kejadian adalah jumlah kejadian yang diinginkan/diamati dibagi dengan jumlah dari sampel yang terambil. Pendekatan non-klasik ini sering disebut pendekatan Frekuensi Relatif dalam menghitung peluang suatu kejadian;

Jika S menyatakan sampel dari suatu populasi, E menyatakan kejadian yang diinginkan dalam sampel yang diamati, serta *p* dan *n* masing-masing menyatakan jumlah kejadian yang diinginkan dan ukuran sampel, maka menurut pendekatan non-klasik peluang dari E dinyatakan dalam notasi P(E) adalah: **P(E)=p/n**

Dalam teori peluang terdapat beberapa sifat, yaitu sebagai berikut :

Sifat-sifat Peluang: Jika A suatu kejadian maka berlaku:

- P(S) = 1
- Nilai peluang kejadian A: $0 \leq P(A) \leq 1$
- P (A U B) =P(A) + P (B) – P(A ∩ B)
- Jika A dan B kejadian yang saling terpisah maka P (A U B) =P(A) + P (B)
- P(A)+P(A')=1
- Jika A1, A2, A3, …, An adalah kejadian-kejadian yang saling terpisah, maka P(A1 U A2 U A3 … U An) = P(A1) + P(A2) + P(A3) + …. + P(An).

Contoh-contoh peluang

1. Perhatikan lagi pelemparan sebuah dadu, jika yang diamati kejadian munculnya angka 1.n(S)=6, dan n(angka 1)=1 maka Peluang muncul angka 1=1/6.Peluang muncul angka ganjil adalah 3/6=1/2

2. Ali ingin mengambil sebuah kartu dari setumpuk kartu bridge, maka peluang yang terambil kartu As adalah 4/52

LEMBAR KERJA MAHASISWA 1.3 :

1. Ada 25 orang pelamar pekerjaan yang terdiri dari 15 orang pria dan 10 orang wanita pada PT Maju mundur . Jika yang diterima hanya 1 orang pelamar saja maka peluang yang diterima pria = ………, dan peluang yang diterima wanita adalah ………
2. Dari hasil penelitian diketahui bahwa dari 1000 kaleng roti ABC ada 5 kaleng yang cacat. Jika Ira mengambil 1 kaleng roti secara acak maka peluang kaleng roti tsb cacat = ……
3. Sebuah dadu dilempar sekali, maka peluang muncul angka 4=…., peluang muncuk bukan angka 4 adalah ……., peluang muncul angka lebih kecil dari 4 adalah ….., peluang angka yang muncul merupakan factor dari 4 = ………
4. Sebuah kotak berisi 4 bola merah, dan 3 bola hijau. Jika diambil sebuah bola secara acak dari kotak tsb peluang terambil bola merah dari kotak tersebut adalah ….., Jika Putu mengambil 2 bola secara acak dari kotak maka peluang bola yang terambil satu merah dan satu hijau adalah: …….

1.4 Peluang Bersyarat

Jika A dan B dua kejadian dalam ruang sampel S. Kejadian A dengan syarat B adalah kejadian terjadinya A yang ditentukan oleh persyaratan kejadian B telah terjadi. Kejadian munculnya A dengan syarat B ditulis A|B. Demikian juga sebaliknya, kejadian B dengan syarat A, ditulis B|A. Peluang bersyarat didefinisikan sbb:

Peluang bersyarat B jika diketahui A, $P(B/A) = P(A \cap B) / P(A)$, dengan $P(A) > 0$.
Peluang bersyarat A jika diketahui B, $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$, dengan $P(B) > 0$.
Kejadian A dan B dikatakan bebas jika dan hanya jika $P(A \cap B) = P(A). P(B)$.

.

Contoh:

Kobon satu tiga adalah perusahaan yang bergerak dalam pembuatan mebel kayu. Dari pengalaman yang telah lampau diketahui bahwa: peluang pesanan siap dikirim secara tepat waktu adalah 0,80 dan peluang pesanan dikirim dan sampai di tujuan tepat waktu adalah 0,72. Berapakah peluang pesanan sampai di tujuan secara tepat waktu dengan catatan bahwa pesanan tersebut sudah siap untuk dikirimkan secara tepat waktu?

Jawab :

Misal *R* adalah peristiwa bahwa pesanan siap dikirim tepat waktu dan *D* adalah peristiwa pesanan akan tepat waktu sampai di tujuan.

Kita tahu bahwa $P(R) = 0{,}80$ dan $P(R \cap D) = 0{,}72$

$$P(D \mid R) = \frac{P(R \cap D)}{P(R)} = \frac{0{,}72}{0{,}80} = 0{,}90$$

Jadi peluang pesanan akan sampai di tujuan sesuai tepat waktu adalah 0,90 dengan syarat bahwa pesanan siap dikirim tepat waktu.

ATURAN BAYES:

Misalkan A dan B kejadian sembarang, maka berlaku $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$

Suatu gagasan penting dalam teori peluang adalah pengertian bebas bersyarat, kejadian A dan B dikatakan bebas bersyarat jika diketahui C terjadi jika peluang bersyarat terjadinya A tidak berubah oleh adanya informasi apakah B terjadi atau tidak.

Kejadian A dan B dikatakan bebas bersyarat jika diketahui C telah terjadi jika berlaku: $P(A/B \cap C) = P(A/C)$ dan setara dengan $P(A \cap B) = P(A/C).P(B/C)$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$

LEMBAR KERJA MAHASISWA 1.4 :

1. Misalkan peluang seorang mahasiswa lulus mata kuliah PIP= ¾ dan mata kuliah kalkulus 5/6. Jika peluang lulus paling sedikit satu mata kuliah =7/8 maka peluang lulus dua mata kuliah adalah……………..
2. Misalkan tiga orang memperebutkan suatu hadiah. Dua orang diantaranya mempunyai peluang yang sama, sedangkan orang ke tiga mempunyai peluang dua kali lebih besar dari dua orang pertama. Peluang orang ke tiga menang adalah …………….
3. Sebuah kantong berisi 15 bola merah, 12 bola biru, dan 3 bola hijau. Diambil sebuah bola secara acak sebanyak dua kali tanpa pengembalian. Peluang bola yang terambil merah pada pengambilan pertama dan hijau pada pengambilan kedua adalah.....

Soal Latihan Bab 1

1. Jika P dan Q dua kejadian, buktikan hubungan berikut $(P \cap Q) \subset Q \subset (P \cup Q)$
2. Jika R dan Q suatu kejadian dan berlaku $R \subset Q$, buktikan $P(R) \leq P(Q)$ dan $P(R \cup Q) = P(R) + P(Q) - P(R \cap Q)$
3. Buktikan jika kejadian R dan Q saling asing berlaku $P(R \cup Q) = P(R) + P(Q)$
4. Buktikan kejadian R dan Q saling bebas jika dan hanya jika berlaku $P(Q/R) = P(Q)$ dan $P(R/Q) = P(R)$
5. Dalam UAS Pengantar Ilmu Peluang, seorang mahasiswa diwajibkan mengerjakan 5 soal dari 7 soal yg tersedia. Tentukan:
   a. banyaknya jenis pilihan soal yg mungkin untuk dikerjakan
   b. banyaknya jenis pilihan soal yg mungkin dikerjakan jika no.1 dan 2 wajib dikerjakan.
6. PBSI akan menyiapkan sepasang pemain ganda putra dari 6 orang calon pemain yang akan dikirim ke kejuaraan Asia di Kualalumpur. Tentukanlah banyaknya kemungkinan pasangan yang dapat terbentuk
7. Dalam pelemparan dua buah dadu, hitunglah peluang munculnya angka 6 pada dadu pertama dan angka genap pada dadu kedua.
8. Sebuah koin dilantunkan sampai bagian gambar muncul atau dilantunkan sebanyak 3 kali. Jika pada lantunan pertama tidak muncul bagian gambar, berapa peluang jika koin tersebut dilantunkan sebanyak 3 kali?
9. Putu dan kadek bermain Game dengan taruhan bola, Putu mempunyai 1 bola dan Kadek 2 bola. Aturan permainan yang mereka sepakati adalah jika kalah harus membayar dengan bola. Jika bola salah satu dari mereka habis maka permainan berakhir, anak yang masih mempunyai bola menjadi pemenang. Berapakah peluang Kadek menang?
10. Diketahui dua kejadian A dan B dengan P(A) = ¼, P(A|B) = 1/3, P(B|A) = ½. Tentukan
    a. $P(A \cap B)$
    b. $P(A|B^C)$

DAFTAR PUSTAKA

Ronald E Walpole & Raymond H Meyers. (1995). *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan.* Bandung: ITB.

Ross, S. (1996). *Suatu Pengantar Ke Teori Peluang.* Bogor: Jurusan Statistika IPB Bogor.

Sahoo, P. (2017, Januari 19). *Probability & Mathematical Statistics.* Retrieved from http://www.freetechbooks.com/prasanna-sahoo-a4475.html

Tirta, I. M. (2014). *Pengantar Statistika Matematika, Diktat Kuliah.* Jember: Unit Penerbit FMIPA Universitas Jember.

BAB 2
PEUBAH ACAK

STANDAR KOMPETENSI:

Setelah mempelajari dan mengerjakan latihan-latihan yang ada pada bahan belajar mandiri ini, anda diharapkan dapat:

1. Menyebutkan dan memberikan contoh peubah acak
2. Mampu menentukan fungsi sebaran suatu peubah Acak
3. Menentukan dan memberi contoh distribusi peluang kontinu
4. Menentukan dan memberi contoh distribusi peluang diskrit.

2.1 PENGERTIAN PEUBAH ACAK

Pada saat melakukan percobaan acak sering kali kita tertarik pada suatu fungsi hasil percobaan bukan pada hasil percobaan tersebut. Misalkan, sekeping uang logam dilempar 2 kali, maka ruang sampel dari percobaan acak ini (A menyatakan sisi angka dan G menyatakan sisi gambar uang logam) adalah: S = {AA, AG, GA, GG}. Jika pengamat hanya tertarik dengan Jumlah Sisi Angka yang muncul pada percobaan tersebut – bukan pada urutan pemunculan sisi-sisi dari mata uang maka dapat didefinisikan: R = {0, 1, 2}

Peubah Acak dituliskan sebagai huruf kapital (X, *Y*, *Z*). Nilai-nilai tertentu yang merupakan hasil percobaan dituliskan dengan huruf kecil (x, *y*, *z*)

R = {0, 1, 2} merupakan suatu peubah acak.

- Peubah Acak (*Random Variable*) didefinisikan sebagai suatu fungsi yang memetakan setiap anggota S dari suatu percobaan acak ke himpunan bilangan Real R.
- Peubah Acak Diskret: peubah acak yang wilayah fungsinya terdiri dari himpunan bilangan bulat. Pada umumnya, wilayah dari peubah acak ini diperoleh dengan melakukan teknik pencacahan (*counting*).
- Peubah Acak Kontinu: peubah acak yang wilayah fungsinya terdiri dari himpunan bilangan rasional. Pada umumnya, wilayah dari peubah acak ini diperoleh dengan melakukan teknik pengukuran (*measu-rement*).

LEMBAR KERJA MAHASISWA 2.1 :

1. Misalnya pada percobaan acak pemeriksaan tiga suku cadang mobil jika suku cadang yang diambil cacat diberi symbol C dan jika baik diberi symbol B. Ruang sampel dari percobaan acak tersebut S = ………………………………., Jika Ali tertarik pada banyaknya barang yang cacat maka peubah acak yang menyatakan banyaknya barang yang cacat adalah …… ……………………
2. Sebuah koin dilantunkan tiga kali, maka ruang sampel dari percobaan acak tersebut adalah …………….. .Misalkan X peubah acak yang menyatakan banyaknya muncul angka maka X= ……., jika W peubah acak yang menyatakan banyaknya muncul angka dikurangi banyaknya muncul gambar , maka Peubah acak W = ……………..
3. Sebuah dadu dilempar 2 kali. Ruang sampel dari percobaan acak tersebut S=………….. , Jika V menyatakan jumlah angka yang mungkin terjadi dari kedua lemparan tersebut, maka peubah acak V=……………..

2.2 DISTRIBUSI PELUANG DISKRET

Suatu peubah acak diskret akan mendapatkan padanan nilainya dengan peluang tertentu. Perhatikan kembali kasus percobaan melempar uang logam 2 kali, peubah acak X yang menyatakan banyaknya sisi angka yang muncul,maka nilai x=2 berpeluang=1/4.

Akan lebih mudah jika semua peluang suatu peubah acak X dinyatakan sebagai fungsi suatu nilai numerik. $f(x) = P(X=x)$, misalnya $f(2) = P(X=2)$. Himpunan pasangan terurut (x,f(x)) disebut fungsi peluang, atau fungsi massa peluang atau distribusi peluang peubah acak diskret X

Distribusi Peluang peubah acak diskret harus dipenuhi:

- $f(x) \geq 0$ atau $0 \leq f(x) \leq 1$
- $f(x) = 1$
- $P(X=x)=f(x)$
- Fungsi sebaran komulatif /Fungsi sebaran, dinotasikan: **F(x)** Untuk X peubah acak diskret $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t<x} f(t)$

LEMBAR KERJA MAHASISWA 2.2 :

1. Suatu kotak berisi permen 6 rasa coklat dan 3 rasa susu , jika X = banyaknya rasa susu yang diambil, maka Fungsi pdf dari banyaknya permen rasa susu yang diambil …………………………., P(x=0)= …….., P(x=1)= ………………., P(x=2) = ………………………………., P(x=3)=…………
2. Peubah acak X menyatakan banyaknya muncul gambar pada pelantunan koin sebanyak tiga kali, maka P(x=0)= …….., P(x=1)= ………………., P(x=2) = ………………………………., P(x=3)=…………., P(x<2)=…………

2.3 DISTRIBUSI PELUANG KONTINU

Perhatikan distribusi berat badan dari anak yang berumur 10 tahun. Antara sebarang dua nilai, misalnya 25 kg-30 kg , ada tak hingga banyak berat badan, misalnya salah satu nilainya 26,5 kg, dsb. Peluang memilih seorang anak dengan berat badan tepat 26 kg tidak kurang atau lebih sedikitpun sangatlah kecil sehingga peluang kejadian tersebut diberi nilai nol. Akan lebih mudah jika yang dicari peluang anak dengan berat badan paling rendah 25 kg tetapi tidak lebih dari 27 kg. sekarang yang diamati berupa selang bukan lagi titi dari peubah acak.

Suatu peubah acak kontinu pada setiap titik x mempunyai peluang nol. Selanjutnya kita akan pelajari peluang untuk berbagai selang dari peubah acak kontinu .

Peubah Acak X dikatakan peubah acak kontinu bila terdapat fungsi nonnegatif f, yang terdefinisi pada semua bilangan nyata x $\in$ (-∞,∞), mempunyai sifat untuk setiap himpunan bilangan nyata B,

- $P(X \in B) = \int_B f(x)dx$
- Fungsi f dikatakan **fungsi kepekatan peluang/densitas peluang** peubah acak X

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- $P\{X \in (-\infty, \infty)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P\{X < a\} = P\{X \le a\} = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

LEMBAR KERJA MAHASISWA 2.3 :

1. Peubah acak kontinu X memiliki nilai antara X = 1 dan X = 3 dengan fungsi kepekatan dinyatakan $f(x) = \frac{1}{2}$, buktikan bahwa f(x) memang benar suatu fungsi kepekatan peluang. Tentukan nilai P(X < 2)= …………………, (2<x<2,5)=………, F(x)=……………
2. Jumlah jam, diukur dalam satuan 100 jam, suatu keluarga akan menggunakan mesin penghisap debu dalam setahun berbentuk peubah acak kontinu X dengan fungsi kepekatan peluang
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, 1 \le x, 2 \\ 0, & untuk\ x lainnya \end{cases}$$
Maka peluang keluarga tersebut dalam setahun menggunakan mesin pengisap debu kurang dari 150 jam =………………………, antara 100 dan 200 jam =…………………..
3. Umur penyimpanan suatu produk olahan daging ayam dinyatakan dalam hari berbentuk peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang
$$f(x) = \begin{cases} \frac{20000}{(x+100)^3}, x > 0 \\ 0, \quad x\ lainnya \end{cases}$$
Peluang produk akan bertahan paling sedikit 100 hari=…., antara 80 sampai 125 hari=..

Soal Latihan bab 2

1. Tentukan mana dari peubah acak berikut yang merupakan peubah acak diskret dan mana yang kontinu
   a. X : banyaknya mahasiswa yang absen pada kuliah PIP
   b. Y : lamanya pertandingan tunggal bulutangkis
   c. Z : banyaknya tas yang dihasilkan pengrajin setiap bulan
   d. P : Tinggi badan mahasiswa prodi Matematika
   e. Q : banyaknya mangga yang busuk dari sekeranjang buah manga yang dibeli ibu
2. Sebuah peubah acak diskrit Z mempunyai 6 kemungkinan nilai = 0, 1, 2,3, 4, dan 5. Sebaran peluangnya sebagai berikut:

Z	0	1	2	3	4	5
P(z)	0,05	q	0,10	0,20	0,25	0,15

   a. Tentukanlah nilai q
   b. Berapakah peluang bahwa z >3?
   c. Hitunglah peluang P(z ≤ 2)
3. Suatu kotak berisi 4 uang logam lima ratusan dan 2 seribuan, 3 uang logam diambil secara acak tanpa pengembalian.
   a. Tentukaan distribusi peluang jumla J dari ke 3 uang.
   b. Nyatakan distribusi peluang dengan grafik,
   c. nyatakan distribusi kumulatifnya
4. Tentukan nilai c sehingga fungsi berikut merupakan distribusi peluang peubah acak X diskret
   $f(x) = c(x^2$+6x-10), x=1,2,3,dan 4
5. Tentukan nilai k sehingga fungsi berikut merupakan distribusi peluang peubah acak X diskret
   $f(x) = k(x^2$+2), x= 0,1,2,3
6. Diketahui X peubah acak kontinu dengan fungsi densitas peluang:

$$f(x) = \begin{cases} k(3x^2 - 2); & 0 < x < 2 \\ 0 \ ; & x \ lainnya \end{cases}$$

   Tentukan : a. k agar X merupakan fungsi kepekatan peluang
   b. nilai P(X < 1.5)
7. Bila X suatu peubah acak diskret dan diberikan fungsi densitas peluang :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{kx+1}{5}; & x = 0,1,2,3 \\ 0 & ;\ x \text{ lainnya} \end{cases}$$

a. Tentukan nilai k

b. Hitung f(0), f(1),f(2) dan f(3)

8. Suatu pengiriman 10 TV LED yang sama ke suatu toko mengandung 3 yang cacat. Bila Adi membeli 2 TV ini secara acak, cari distribusi peluang banyaknya yang cacat ?

9. Bila Y adalah peubah acak yang menyatakan proporsi waktu sibuk perhari dari sebuah supermarket dengan fungsi densitas peluang :

$$f(y) = \begin{cases} cy^2(1-y)^4, 0 \le y \le 1 \\ 0 \qquad , \text{lainnya} \end{cases}$$

Tentukan nilai c agar $f(y)$ merupakan fungsi densitas peluang!

10. Diketahui Z merupakan peubah acak yang kontinu dengan fungsi kepekatan peluang

$$f(z) = \begin{cases} n(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \textit{selainnya} \end{cases}$$

a. Hitung nilai n

b. Hitung P(Z > 1)

c. Tentukan fungsi distribusi kumulatifnya beserta grafiknya

DAFTAR PUSTAKA

Ronald E Walpole & Raymond H Meyers. (1995). *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan.* Bandung: ITB.

Ross, S. (1996). *Suatu Pengantar Ke Teori Peluang.* Bogor: Jurusan Statistika IPB Bogor.

Sahoo, P. (2017, Januari 19). *Probability & Mathematical Statistics.* Retrieved from http://www.freetechbooks.com/prasanna-sahoo-a4475.html

Tirta, I. M. (2014). *Pengantar Statistika Matematika, Diktat Kuliah.* Jember: Unit Penerbit FMIPA Universitas Jember.

BAB 3
DISTRIBUSI PELUANG BERSAMA

STANDAR KOMPETENSI:

Setelah mempelajari dan mengerjakan latihan-latihan yang ada pada bahan belajar mandiri ini, anda diharapkan dapat:

1. Mampu Menyebutkan dan menentukan Distribusi peluang gabungan Diskret
2. Mampu Menyebutkan dan menentukan Distribusi peluang gabungan Diskret
3. Menentukan Ditribusi bersyarat
4. Menentukan Peubah Acak yang saling bebas

Jika pada bab sebelumnya kita mempelajari peubah acak beserta distribusi peluangnya berdasarkan hasil percobaan peubah acak yang tunggal serta dibatasi pada ruang sampel berdimensi tunggal. Sering kali pencatatan hasil percobaan yang kita peroleh tidak selalu berasal dari perubah acak yang tunggal, ada kalanya diperlukan pencacatan beberapa perubah acak yang terjadi secara serentak. Misalnya kita ingin memeriksa sebuah Sepeda motor. Bila X menyatakan umurnya dan Y menyatakan jumlah komponen yang cacat didalamnya maka akan menghasilkan ruang sampel berdimensi 2 yang terdiri atas hasil (x,y).

Jika X dan Y perubah acak, maka peluang terjadinya secara serentak X dan Y dinyatakan sebagai f(x,y) disebut Distribusi Peluang Gabungan X dan Y.

3.1 Distribusi Peluang gabungan Diskret

Fungsi f(x,y) merupakan Distribusi Peluang gabungan/fungsi massa peluang peubah acak diskret X dan Y bila:

1. $f(x,y) \geq 0$, untuk semua (x,y)
2. $\sum_{x}\sum_{y} f(x,y) = 1$
3. $P[(X,Y) \in A] = \sum\sum_{A} f(x,y)$ untuk setiap daerah A di bidang x,y
4. Untuk dua peubah acak X dan Y, fungsi sebaran peluang kumulatif bersama dari X dan Y adalah
   $F(a,b) = P\{X \leq a, Y \leq b\}$
5. Untuk dua peubah acak diskret X dan Y, F(a,b) memiliki bentuk $F(a,b) = \sum_{x=-\infty}^{a}\sum_{y=-\infty}^{b} p(x,y)$

<u>Contoh peubah acak gabungan diskrit adalah sbb</u>

Misalkan sebuah kotak berisi 4 bola bernomor 1, 2, 3 dan 4. Jika diambil dua bola secara acak dengan pengembalian maka kita dapat menemukan dua peubah acak; misalkan peubah acak X menyatakan bilangan pada pengambilan bola pertama dan peubah acak Y menyatakan bilangan pada pengambilan bola kedua.

Berikut merupakan contoh peubah acak gabungan kontinu , Misalkan kita amati orang dewasa dengan kondisi tubuh sehat memiliki tekanan darah normal antara 120/80 mm Hg hingga 140/90 mm Hg kita sebut sebagai peubah acak X, dan kadar kolesterolnya Y biasanya antara 120 dan 240 mg.

LEMBAR KERJA MAHASISWA 3.1 :

Sebuah kotak berisi 5 kelereng merah,3 kelereng kuning, dan 4 kelereng biru. Jika diambil 3 kelereng secara acak dari kotak tersebut, M dan K menyatakan banyaknya kelereng merah dan kuning yang terambil. Jika p(i,j) menunjukkan P(M=i,K=j), maka p(0,0) =…… , p(0,1)=………, p(0,2)= ……., p(0,3)= …………, p(1,0) =………, p(1,1)=………, p(1,2)=………, p(1,3)=………, p(2,0) =……, p(2,1)=………, p(2,2)=………, p(2,3)=………, p(3,0)=………, p(3,1)=………, p(3,2)=……….,p(3,3)=………., p(4,0)=………, p(4,1)=………, p(4,2)= …….., p(4,3)= …….., p(5,0)= ……., p(5,1)=………, p(5,3)=……….

$P_M(0)$=…….., $P_M(1)$=…….., $P_M(2)$=…….., $P_M(3)$=…….., $P_M(4)$=…….., $P_M(5)$=……..

3.2 Distribusi peluang gabungan Peubah acak Kontinu

Fungsi f(x,y) merupakan Distribusi Peluang gabungan/fungsi kepadatan peluang peubah acak dkontinu X dan Y bila:

1. $f(x,y) \geq 0$, untuk semua (x,y)
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$
3. $P[(X,Y) \in A] = \iint_A f(x,y)dxdy$ untuk setiap daerah A di bidang x,y.

LEMBAR KERJA MAHASISWA 3.2 :

fungsi kepekatan bersama dari acak X dan Y didefinisikan sebagai

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-y} & jika\ 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & lainnya \end{cases}$$

P(X>1,Y<1)=……………, P(X<Y)= ……………., P(Y<b) = ………

3.3 **distribusi Peluang marginal/Pias**

Jika f(x,y) diketahui maka kita dapat mencari distribusi peluang X saja dan Y saja, yaitu :

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{y} f(x,y) \ , \ \textit{jika diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, \ \textit{jika kontinu} \end{cases}$$

yang disebut distribusi marginal X.

Sedangkan distribusi marginal Y

$$h(y) = \begin{cases} \sum_{x} f(x,y) \ , \ \textit{jika diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx, \ \textit{jika kontinu} \end{cases}$$

Lembar kerja mahasiswa 3.3

1. Tentukan Distribusi peluang marginal X dan Distribusi peluang marginal Y untuk soal LKM 3.1 dan 3.2
2. Misalkan X dan Y mempunyai fungsi peluang gabungan berikut.

y \ x	2	4
1	0,10	0,15
2	0,20	0,30
3	0,10	0,15

Carilah distribusi peluang marginal X dan Y

3.4. **Distribusi bersyarat dan bebas statistik**

Telah dikemukakan pada bab 2 bahwa nilai dari peubah acak sebenarnya adalah kejadian yang merupakan himpunan bagian dari ruang sampel, sehingga jika A dan B merupakan kejadian yang ditentukan oleh masing-masing X=x, Y=y, maka dari definisi peluang bersyarat P(A | B) = $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, didapat P(Y=y | X=x) = $\frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f(x,y)}{g(x)}$

Atau sering ditulis $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$, $f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}$.

Perhatikan jika X dan Y bebas maka maka x tidak tergantung y sehingga f(x | y) = f(x)

Jadi $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = g(x)$, diperoleh f(x,y) = g(x).h(y).

Lembar kerja mahasiswa 3.4

1. Jika X dan Y memiliki fungsi peluang bersama seperti tabel berikut :

Y	X	
	3	4
1	0,15	0,10
2	0,20	0,30
3	0,15	0,10

   Tentukan peluang bersyarat Y pada X = 3 (P(Y|X=3)

2. Misalkan X dan Y mempunyai fungsi padat peluang bersama berikut.

   f(x,y) = 2 , jika 0<x<y<1

   = 0 , jika x dan y lainnya.

   a. Selidiki apakah X dan Y bebas
   b. Hitunglah P(1/4 < X < ½ | Y=3/4)

Soal latihan Bab 3

1. Dodi melempar dua buah dadu bersamaan dan mata dadu yang muncul diamati, selanjutnya didefinisikan peubah acak X menyatakan bilangan lebih kecil dan Y menyatakan bilangan yang lebih besar pada dadu, Tentukan fungsi kepadatan peluang bersama X dan Y
2. Tentukan nilai q sehingga fungsi berikut merupakan distribusi peluang gabungan peubah acak X dan Y
   a. f(x,y)=qxy , untuk x=1,2,3 dan y=1,2,3
   b. f(x,y)=q(x-y),untuk x=-2,0,2 dan y=-2,3
3. Pandang fungsi kepadatan gabungan

   $$f(x,y) = \begin{cases} kx(1+3y^2) & ,0 < x < 2,\ 0 < y < 1 \\ 0 & ,\ untuk\ x, y\ yang\ lain \end{cases}$$

   a. tentukan k agar f merupakan fungsi distribusi peluang gabungan
   b. Hitung P[(X,Y) $\in$ A] jika A = {(x,y) | 0<x< 1, ¼ <y< ½ }
4. Dua peubah acak mempunyai fungsi kepadat gabungan

   f(x,y) **= k(x^2 + y^2) , jika 0<x<2, 1<y<4**

   = 0 , jika x dan y yang lain

   a. carilah nilai k

b. Hitung P[(X,Y) $\in$ A] jika A = {(x,y) | 0<X< 2, 2 <Y< 3 }
c. Hitung P[(X,Y) $\in$ A] jika A = {(x,y) | 1 $\leq$X$\leq$ 2 }
d. Hitung P[(X,Y) $\in$ A] jika A = {(x,y) | X+Y>4 }

5. X dan Y merupakan peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan bersama :

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} \; untuk \; 0 < x, y < \infty \\ \quad 0 \;\; untuk \; lainnya \end{cases}$$

   a. Tentukan peluang marginal dari X
   b. Tentukan Peluang marginal dari Y
   c. Apakah X dan Y saling bebas?

6. Jika X dan Y adalah peubah acak diskrit dengan fungsi sebaran kumulatif

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{32}, untuk \; x = 1,2; y = 1,2,3,4 \\ \\ 0, untuk \; x \; yang \; lainnya \end{cases}$$

Tentukan fungsi peluang bersyarat Y jika diketahui X

DAFTAR PUSTAKA

Ronald E Walpole & Raymond H Meyers. (1995). *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan.* Bandung: ITB.

Ross, S. (1996). *Suatu Pengantar Ke Teori Peluang.* Bogor: Jurusan Statistika IPB Bogor.

Sahoo, P. (2017, Januari 19). *Probability & Mathematical Statistics.* Retrieved from http://www.freetechbooks.com/prasanna-sahoo-a4475.html

Tirta, I. M. (2014). *Pengantar Statistika Matematika, Diktat Kuliah.* Jember: Unit Penerbit FMIPA Universitas Jember.

BAB 4

NILAI HARAPAN

STANDAR KOMPETENSI:

Setelah mempelajari dan mengerjakan latihan-latihan yang ada pada bahan belajar mandiri ini, anda diharapkan dapat:

1. menentukan nilai harapan fungsi suatu peubah acak baik diskret maupun kontinu
2. menentukan nilai harapan fungsi beberapa peubah acak
3. menghitung peragam, ragam jumlah peubah acak, dan korelasi

4.1 Nilai Harapan

Pada Bab sebelumnya Kita telah mempelajari peubah acak serta penggunaannya. Pada bagian ini kita akan mempelajari nilai harapan (expected value) dari peubah acak. Nilai harapan dari peubah acak adalah pemusatan dari nilai peubah acak jika suatu percobaan acak dilakukan secara berulang-ulang sampai tak berhingga kali. Nilai harapan berguna untuk mengitung mean dan ragam dari peubah acak dengan ruang sampel yang besar.

Bila X suatu peubah acak dengan distribusi peluang f(x), maka nilai harapan atau rataan dari peubah acak Xdiberikan oleh

- $\mu = E(X) = \sum x f(x)$

  Untuk X diskrit, dan

- $\mu_{)} = E(X) = \int_{\infty}^{\infty} x.f(x)dx$

Contoh 1

Hitung nilai harapan dari peubah acak X yang mempunyai kemungkinan nilai 0 dan 1 dengan p(X=0)= p(X=1) = ½

Jawab

Nilai harapan dari X adalah

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} xp(x) = 0(1/2) + 1(1/2) = 1/2$$

Contoh 2

Hitunglah nilai harapan peubah acak *X* yang mempunyai fungsi pada:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & untuk\, 0 < x < 1 \\ 0, & untuk\, x\, lainnya \end{cases}$$

Jawab

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x.2xdx = \frac{2}{3}x^3 \Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Jika X suatu peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$, maka nilai harapan fungsi $g(x)$ dinyatakan sebagai

$$E[g(x)] = \begin{cases} \sum_x g(x) f(x) & \textit{Jika x diskret} \\ \int_{\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx,. & \textit{Jika x kontinu} \end{cases},$$

Contoh 3

Misalnya X suatu peubah acak dengan distribusi peluang sebagai berikut:

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

Hitunglah nilai harapan peubah acak $Y = X + 1$

Jawab

Karena X peubah acak diskret, maka

$$E[g(x)] = \sum_x g(x) f(x) = \sum_{x=0}^{3} (x+1) f(x)$$

$$= (0+1)\frac{1}{10} + (1+1)\frac{2}{5} + (2+1)\frac{3}{10} + (3+1)\frac{1}{5}$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{8}{10} + \frac{9}{10} + \frac{8}{10} = \frac{29}{10} = 2{,}9$$

Contoh 4:

Diketahui X suatu peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang

$$f(X) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & \textit{untuk } 1 < x < 2 \\ 0, & \textit{untuk x lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah nilai harapan $g(X)=2X$-1!

jawab

$$E(2x-1) = \int_1^2 (2x-1)\frac{1}{3}x^2\,dx = \frac{1}{3}\int \left(2x^3 - x^2\right)dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}(16-1) - \frac{1}{3}(8+1)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{15}{2} - 3\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Nilai harapan dari Fungsi Peluang Gabungan

Jika X dan Y peubah acak dengan distribusi peluang gabungan $f(x,y)$, maka nilai harapan fungsi $g(X,Y)$ ditentukan oleh:

$$E\left[g(X,Y)\right] = \begin{cases} = \sum_x \sum_y g(x,y)\, f(x,y), & \textit{Jika } X \textit{ dan } Y \textit{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f(x,y)\,dx\,dy, & \textit{Jika } X \textit{ dan } Y \textit{ kontinu} \end{cases}$$

Contoh 5:

Distribusi peluang gabungan peubah acak X dan Y sebagai berikut

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$

Hitungalah nilai harapan $g(X, Y) = XY$.

Jawab:

$$E(XY) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xyf(x,y)$$

$$= (0)(0)f(0,0) + (0)f(0,1) + (0)(2)f(0,2) + (1)(0)f(1,0)$$

$$+ (1)(1)f(1,1) + (1)f(1)(1,1) + (1)(2)f(2,1) + (2)(2)f(2,2)$$

$$= 1.\frac{1}{9} + 2.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{18} = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{2+9+4}{18} = \frac{15}{18}$$

Contoh 6

Hitunglah $E\left(\frac{Y}{X}\right)$ untuk fungsi kepekatan peluang :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1+3y^2)}{4} & 0<x<2;0<y<1\\ 0 & x\ dan\ y\ lainnya\end{cases}$$

Jawab

$$E\left(\frac{Y}{X}\right)=\int_0^1\int_0^2 \frac{y}{x}\,\frac{x\left(1+3y^2\right)}{4}\,dxdy=\int_0^1\int_0^2\frac{y(1+3y^2)}{4}\,dxdy=\int_0^1\frac{y+3y^3}{2}\,dy=\frac{5}{8}$$

Sifat –Sifat Nilai harapan
➢ Jika *a* dan *b* konstanta, maka $E(aX+b) = aE(X)+b$
➢ Jika $a = 0$, maka $E(b)=b$
➢ Jika $b = 0$, maka $E(aX) = aE(X)$
➢ $E[g(X)\pm h(X)] = E[g(X)]\pm E[h(X)]$
➢ Jika $g(X,Y) = X$ dan $h(X,Y)=Y$ maka $E(X\pm Y)= E(X)\pm E(Y)$
➢ Jika *X* dan *Y* dua peubah acak yang bebas, maka $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Lembar Kerja Mahasiswa 4.1

1. Dibentuk suatu panitia yang terdiri dari 3 orang yang dipilih secara acak dari 4 orang wanita dan 3 orang pria,tentukan nilai harapan banyaknya wanita dalam panitia tersebut
2. Sebaran peluang peubah acak X, jumlah cacat per 10 meter kain endek Sideman dalam gulungan kontinu dengan lebar seragam diberikan oleh

X	0	1	2	3	4
P(x)	0,42	0,38	0,15	0,04	0,01

   Carilah rata-rata cacat per 10 meter kain endek tersebut
3. Amir ikut permainan judi pelemparan dadu sekali, Jika muncul mata dadu 6 ia akan menerima uang Rp.200.000,-, jika muncul mata dadu 5 ia akan menerima uang Rp.250.000,-, jika yang muncul mata 4 ia tidak menerima uang, tetapi jika yang muncul bukan angka 4 atau 5 atau 6, ia harus membayar Rp. 500.000,-. Hitunglah nilai harapan uang yang akan diterima Amir

4. Surya motor melakukan jual beli sepeda motor bekas.Keuntungan penjualan sepeda motor satu juta rupiah (dalam satuan) berupa sebuah peubah acak X yang mempunyai fungsi kepekatan peluang

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

hitunglah keuntungan rata-rata penjualan sepeda motor

5. Buktikan sifat-sifat nilai harapan yang sudah diberikan sebelumnya
6. Misalkan variabel acak X mempunyai distribusi peluang

X	0	1	2
P(X)	0,34	0,41	0,25

Tentukanlah:. E(X), E(2X), E(2X+1) E(X+2), $E(X)^2$

7. Diketahui X dan Y mempunyai fungsi peluang gabungan berikut

y \ x	2	4	6	P(x)
1	0,08	0,10	0,10	....
2	0,12	0,13	0,15	....
3	0,08	0,10	0,14	....
P(y)	.....	.....	......	

Tentukan nilai E(X), E(Y), E(X+Y), dan E(X+2Y)

8. Kebutuhan mingguan untuk minuman tertentu, dalam ribuan liter, dari toko lokal, adalah peubahl acak kontinyu $g(X) = X^2 + X + 2$, di mana X mempunyai fungsi kepekatan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & ,1 < x < 2 \\ 0 & , \text{yang lainnya} \end{cases}$$

Tentukan nilai yang diharapkan dari kebutuhan mingguan minuman tersebut

4.2 Ragam(Variansi) dan Peragam(kovariansi)

Nilai harapan atau rataan suatu peubah acak X menggambarkan letak pusat distribusi peluang, tetapi rataan tidak bisa memberikan gambaran bentuk distribusinya. Oelh karena itu keragaman distribusi perlu digambarkan.

Ukuran keragaman terpenting dari suatu peubah acak X ialah $\sigma_x^2 = E(X-\mu)^2$ yang disebut dengan ragam (variansi) peubah acak X atau dinyatakan dengan Var(X).

- Misalkan X peubah acak dengan distribusi peluang f(x) dan rataan μ, maka ragam dari Xdidefinisikan
- $\sigma_x^2 = E(X-\mu)^2 = \sum_X (x-\mu)^2 f(x)$, untu X peubah acak diskret
- $\sigma_x^2 = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$, untuk X peubah acak kontinu
- σ disebut sebagai **simpangan baku/standar deviasi** dari X
- Teorema : $\sigma_x^2 = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2$,

Contoh 7

Diketahui distribusi peluang dari peubah acak X adalah sebagai berikut, hitung rataan dan ragam dari peubah acak X

x	0	1	2	3
P(x)	1/8	1/4	3/8	1/4

Jawab

E(X) = $\sum_{x=0}^{3} xp(x)$ = 0(1/8) + 1(1/4) + 2(3/8) + 3(1/4) = 7/4

diperoleh rataan $\mu = E(X) = \frac{7}{4}$, $E(X^2) = 0.\frac{1}{8} + 1.\frac{1}{4} + 4.\frac{3}{8} + 9.\frac{1}{4} = \frac{16}{4} = 4$

ragam = $\sigma^2 = 4 - \left(\frac{7}{4}\right)^2$

Sifat -Sifat Ragam

- Jika *X* pebuah acak dengan distribusi peluang *f*(*x*), maka ragam *g*(*X*) adalah $\sigma_x^2(x) = E[\{g(X) - \mu_g(x)\}^2]$
- Jika *X* suatu peubah acak dan *b* suatu tetapan, maka $\sigma^2{}_{x+b} = \sigma_x^2 = \sigma^2$
- Jika *X* suatu peubah acak dan *a* suatu konstanta, maka $\sigma_{ax}^2 = a^2\sigma^2{}_x = a^2\sigma^2$
- Jika *X* dan *Y* peubah acak dengan distribusi peluang gabungan *f*(*x*,*y*), maka $\sigma^2{}_{aX+bY} = a^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_{xy}$
- Jika *X* dan *Y* penuh acak yang bebas, makan $\sigma^2{}_{aX-bY} = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2$

Kovarian/peragam menyatakan ragam bersama dari dua peubah acak Jika *X* dan *Y* dua peubah acak bebas dengan rataan μ_x dan μ_y , maka peragam peubah acak *X* dan *Y* didefinisikan sebagai cov(X,Y)= $\sigma_{XY}^2 = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$ Nilai peragam dapat dihitung dengan: $\sigma_{xy}^2 = E(XY) - E(X)E(Y)$
Teori Chebyshev Peluang bahwa setiap peubah acak *X* mendapat nilai dalam *k* simpngan baku dari nilai rataan adalah paling sedikit $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, yaitu $p(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma \geq 1-\frac{1}{k^2}$

Lembar kerja Mahasiswa 4.2

1. Buktikan sifat-sifat ragam

2. Hitunglah ragam dari peubah acak dengan pdf

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3}{8}x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

3. Hitunglah ragam dari soal no 2,4, dan 6 dari LKM 4.1

4. Diketahui *X* suatu peubah acak dengan distribusi peluang sebagai berikut:

x	0	1	2	3
f(*x*)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

Hitunglah ragam dari X

5. Hitunglah peragam dari soal no 7 LKM 4.1

6. Fraksi *X* dari para pelari pria dan fraksi *Y* dari pelari wanita yang bertanding dalam lari maraton digambarkan oleh fungsi kepekatan gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} 4x^3, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & di \quad tempat \quad lain \end{cases}$$

Carilah peragam *X* dan *Y*

4.3 Fungsi Pembangkit Momen

- Momen ke-k dari peubah acak X dinyatakan dengan $E(X^n)$ dan sering disimbulkan

$$\mu_k^{'} = E(x^k)$$

$$E(X^n) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} x^n f(x) & \text{Jika X adalah peubah acak diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\, dx & \text{Jika X adalah peubah acak kontinu} \end{cases}$$

untuk n= 0,1,2,3,……..

- Fungsi pembangkit momen peubah acak *X* didefinisikan sebagai

$$M_x(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} e^{tX} f(x_i), & \text{Jika X adalah peubah acak diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x) dx, & \text{Jika X adalah peubah acak kontinu} \end{cases}$$

Contoh 8

Ambil k=0, jika peubah acak *X* diskret maka diperoleh $\mu_0^{'} = \sum_x x^0 f(x) = \sum_x f(x) = 1$

Demikian juga dapat dihitung untuk peubah acak *X* kontinu $\mu_0^{'} = \int_{-\infty}^{\infty} x^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Lembar kerja Mahasiswa 4.3

1. Tunjukkan bahwa untuk peubah acak X baik kontinu maupun diskrit berlaku $\mu_1^{'} = E(X)$

2. Peubah Acak X memiliki μ dan ragam $\sigma^2 > 0$. Tentukan nilai a dan b apabila untuk (a+bX) berlaku μ=0 dan $\sigma^2 = 1$?

3. Diketahui *X* suatu peubah acak dengan distribusi peluang sebagai berikut:

x	0	1	2	3	4
f(*x*)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Nilai $\mu_0^{'} = ...,\ \mu_1^{'} = ...,\ \mu_2^{'} = ...,\ \mu_4^{'} = ...$

Nilai $M_x(t)$= ………..

4. Diketahiu fungsi kepadatan peluang $f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & x \text{ } lainnya \end{cases}$

Nilai $\mu_0^{'} = ...,\ \mu_1^{'} = ...,\ \mu_2^{'} = ...,\ \mu_4^{'} = ...$

Nilai $M_x(t)$= ………..

DAFTAR PUSTAKA

Ronald E Walpole & Raymond H Meyers. (1995). *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan.* Bandung: ITB.

Sahoo, P. (2017, Januari 19). *Probability & Mathematical Statistics.* Retrieved from www.math.louisville.edu/~pksaho01/teaching/Math662TB-09S.pdf: http://www.freetechbooks.com/prasanna-sahoo-a4475.html

Tirta, I. M. (2014). *Pengantar Statistika Matematika, Diktat Kuliah.* Jember: Unit Penerbit FMIPA Universitas Jember.

BAB V

BEBERAPA DISTRIBUSI PELUANG KONTINU KHUSUS

STANDAR KOMPETENSI:

Setelah mempelajari dan mengerjakan latihan-latihan yang ada pada bahan belajar mandiri ini, anda diharapkan dapat:

1. Mahasiswa mampu memberi contoh dan menganalisa kasus dengan peubah peubah acak seragam
2. Mahassiwa mampu menggunakan table normal baku
3. Mahasiwa mampu menggunakan distribusi Betha, Gama dan Lognormal
4. Mahassiwa mampu membedakan pengunaan distribusi-distribusi kontinu yang ada

Pada bagiaan ini kita akan pelajari beberapa distribusi peluang kontinu yang sering digunakan pada berbagai bidang.

5.1 Distribusi seragam(Uniform)

Peubah acak X dikatakan berdistribusi secara seragam pada interval (0,1) jika fungsi kepekatan peluangnya adalah

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & selainnya \end{cases}$$

Msalkan, untuk 0<a<b<1

Secara umum, kita katakan bahwa X peubah acak seragam pada interval (α,β) jika fungsi kepekatan peluangnya adalah

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha < x < \beta \\ 0 & selainnya \end{cases}$$

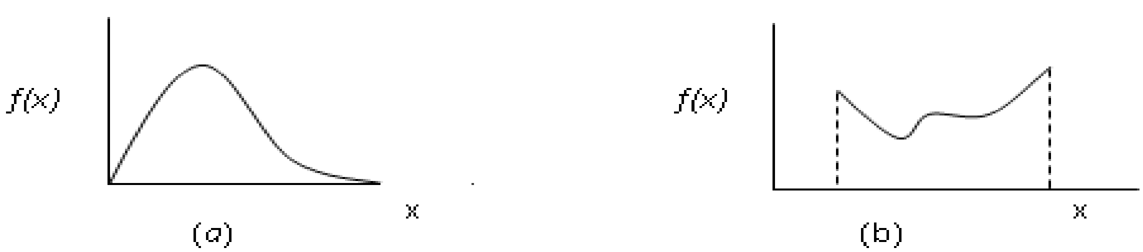
Fungsi sebaran peubah acak seragam pada interval (α,β) adalah

$$F(a) = \begin{cases} 0 & a \le \alpha \\ \dfrac{a - \alpha}{\beta - \alpha} & \alpha < a < \beta \\ 1 & a \ge \beta \end{cases}$$

Jika X peubah acak seragam pada interval [a,b] maka mean dan ragam X diberikan oleh

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ dan } \operatorname{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Contoh grafik fungsi kepekatan peluang yg bersifat kontinu untuk semua nilai X



LEMBAR KERJA MAHASISWA 5.1 :

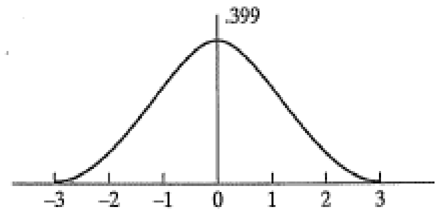
1. Waktu seseorang menunggu datangnya pesawat disebuah bandara antara jam 08.00-10.00 berdistribusi uniform.Peluang seseorang harus menunggu kurang sama dengan 30 menit dari jam 08.00=……….., peluang menunggu lebih dari 30 menit = …………………….
2. Diketahui peubah acak Y berdistribusi seragam pada interval (0,1) dan $Y = \frac{1}{4} X^2$, maka fungsi densitas peluang untuk peubah acak X adalah ….
3. Sebuah kotak dibentuk sedemikian rupa dengan alas berbentuk persegi dengan sisi X cm dan tingginya 10cm, Jika X berdistribusi uniform pada interval 92,8), maka nilai harapan volume kotak tsb adalah …………….cm^3.
4. Buktikan kebenaran rumus nilai harapan dan ragam distribusi uniform

5.2 Distribusi Normal

Peubah acak X dikatakan peubah acak Normal dengan parameter μ dan σ^2 jika fungsi kepekatan peluang X adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

- Grafik y = f(x) pada Distribusi Normal bersifat simetri terhadap rata-ratanya (μ), mempunyai satu puncak, dan berbentuk seperti lonceng atau genta.
- Nilai rata-rata (μ) = median = modus.
- Karena *f*(x) adalah rumus fungsi kerapatan peluang dari X, maka:
    - Grafik y = *f*(x) berada di atas sumbu x
    - Luas daerah di atas sumbu x dan di bawah y = *f*(x), dari x = - ∞ sampai x = ∞, sebesar satu satuan.
- jika X menyebar normal dengan parameter μ dan σ^2 maka Y = αX + β menyebar normal dengan parameter $\alpha\mu + \beta$ dan $\alpha^2\sigma^2$.



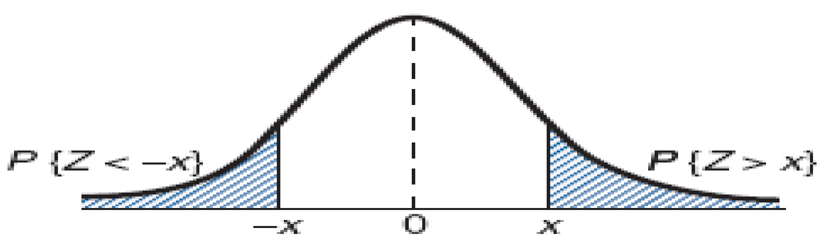
(a)

Distribusi Normal Baku

- Distribusi Normal Baku adalah distribusi normal dengan rata-rata μ = 0, dan simpangan baku σ = 1.
- Jika X berdistibusi Normal dengan rata-rata μ dan simpangan baku σ, dan misal

$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, maka Z berdistribusi Normal Baku.

Distribusi normal baku bersifat simetris sebagamana terlihat pada Gambar berikut



$$\Phi(-z) = P(Z < -z) = P(Z > z) = 1 - \Phi(z)$$

$$P(Z \leq 0) = P(Z \geq 0) = 0,5$$

Keterangan : Untuk mendapatkan nilai 0,5, lihat Tabel distribusi normal pada kolom pertama pada posisi z = 0,0 dan kolom ke dua 00, yang menunjukkan nilai 0,5000.

Untuk a,b,c, dan d bilangan-bilangan real, dan X berdistribusi Normal dengan rata-rata μ dan simpangan baku σ, maka:

$P(a < X < b) = P\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma} < Z < \dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) =$ luas di bawah kurva normal baku dari $z_1 = \dfrac{a-\mu}{\sigma}$ *sampai* $z_2 = \dfrac{b-\mu}{\sigma}$

Sebaliknya jika diketahui nilai peluang normal baku, dapat ditentukan nilai Z.

Contoh

Jika X berdistribusi normal dengan mean $\mu = 3$ dan ragam σ^2 = 16, tentukan

a. $P(X < 11)$

b. $P(X > -2)$

Penyelesaian:

a. $P(X < 11) = P\left\{\frac{X-3}{4} < \frac{11-3}{4}\right\}$

$$= \Phi(2)$$
$$= 0,9772$$

b. $P(X > -2) = P\left\{\frac{X-3}{4} > \frac{-2-3}{4}\right\}$

$$= P(Z > -1,25)$$

$$= P(Z < 1,25)$$

= 0,8944

Contoh

Nilai Z sedemikian hingga $P(Z < z) = 0{,}9535$ adalah z = 1,68.

Lembar kerja Mahasiswa 5.2

1. Jika X berdistribusi normal dengan mean 2 dan ragam= 9, P(X <9)= ……., P(2<X<12)=…… $P(X > -1) =$……..
2. Jika diasumsikan tinggi tentara berdistribusi normal dengan rata-rata 68.22 inci dengan ragam 10.8 inci^2. Peluang banyaknya tentara dalam suatu resimen yang berjumlah 1000 orang yang memiliki tinggi lebih dari 6 kaki (1 kaki=12 inci) = …………………..
3. Sebuah pabrik pipa air menghasilkan pipa-pipa dari ukuran panjang 6m. Dari pengukuran secara teliti ternyata pipa yang dihasilkan mempunyai panjang rata-rata 599.5 cm. Dengan standar deviasi 0.5cm , dan paling panjang 601 cm. Jika diambil secara acak satu pipa, maka berapa kemungkinannya pipa tersebut :
   a. Mempunyai panjang tidak lebih dari 600 cm
   b. Tidak memenuhi syarat
   c. Mempunyai panjang kurang dari 599 cm

5.3 Distribusi Gamma

Sebelum kita membicarakan peubah acak yang mengikuti distribusi gama kita perkenalkand ulu pengertian fungsi gamma. Fungsi gamma $\Gamma(z)$ merupakan bentuk generalisasi dari factorial . $\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}.e^{-x}dx$, z bilangan real positif

Sifat-sifat fungsi Gamma

$$\Gamma(1)=1$$
$$\Gamma(z)=(z-1)\Gamma(z-1)$$
$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi} \qquad ,$$
$$\Gamma(-1/2)=2\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma(n+1)=n!$$

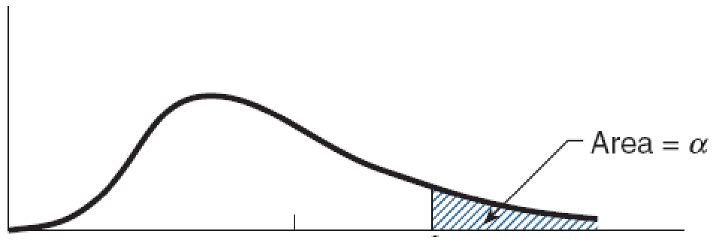
Peubah acak kontinu X disebut berdistribusi Gamma jika dipenihi

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\theta}},0<x<\infty\\ 0, lainnya\end{cases}$$

- Untuk $\alpha>0$ dan $\theta>0$ peuabah acak yang meng ikuti distribusi Gamma dapat dinyatakan dengan $X \propto GAM(\theta,\alpha)$
- Jika $X \propto GAM(\theta,\alpha)$ maka $\begin{matrix}E(X)=\theta\alpha\\ Var(X)=\theta^2\alpha\end{matrix}$

Distribusi Gamma dengan $\alpha = r/2$ dan $\theta=2$ disebut berdistribusi Chi kuadrat (χ^2) dengan derajat bebas r

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)2^{\frac{r}{2}}}x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},0<x<\infty\\ 0, lainnya\end{cases}$$



Gambar distribusi chi kuadrat

Distribusi gamma dengan $\alpha = n$ dengan n bilangan bulat positif dan $\theta = \frac{1}{n}$ disebut dengan distribusi n-Erlang. Selanjutnya distribusi gamma dapat digeneralisasi menjadi distribusi Weibull. Fungsi kepekatan peluang dari distribusi Weibull dinyatakan dengan

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\theta} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^{\alpha}}{\theta}}, 0 < x < \infty \\ 0, lainnya \end{cases}$$

Distribusi Weibull sering digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah yang menyangkut lama waktu (umur) suatu objek atau benda yang mampu bertahan hingga akhirnya objek tersebut tidak berfungsi sebagaimana mestinya (rusak atau mati).

Untuk $\alpha = 1$ distribusi Weibull menjadi distribusi eksponen.

Lembar Kerja mahasiswa 5.3

1. Suatu peubah acak X berdistribusi gamma dengan parameter $\alpha = 1$dan $\theta = 1$ maka peluang X terletak antara median dan mean nya= ……
2. Waktu yang diperlukan (dalam jam) untuk memperbaiki pompa air berbentuk peubah acak berdistribusi gamma dengan parameter $\alpha = 2$ dan $\theta = \frac{1}{2}$. Peluang bahwa perbaikan berikutnya akan memerlukan waktu paling lama 1 jam = ……., peluang paling sedikit 2 jam = ………
3. Tentukan rumus umum mean dan ragam peubah acak X yang berdistribusi gamma
4. Waktu sampai gagal bekerjanya sebuah pelat gesek (dalam jam) pada sebuah kopling dapat dimodelkan dengan baik sebagai sebuah variabel acak Weibull dengan α = 0,5 dan . $\theta = 4000$. Waktu sampai-gagal rata-rata dari pelat gesek tersebut = ……., dan peluang pelat gesek tersebut akan mampu bekerja sekurang-kurangnya 6000 jam= ……...

5.4 Distribusi Beta

Distribussi Beta merupakan salah satu dasar dari distribusi statistic yang banyak digunakan pada Bayesian statistic. Sebelumnya kita pelajari dahulu pengertian fungsi beta.

Fungsi beta $B(\alpha,\beta)$ didefinisikan sbb: $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$

Untuk bilangan bulat positif α dan β berlaku $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

Peubah acak X dikatakan berdistribusi Beta jika fungsi kepekatan peluangnya diberikan sbb $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, 0<x<1\end{cases}$

Lembar Kerja Mahassiwa 5.4

1. Tentukan rumus umum mean dan ragam dari peubah acak X yang berdistribusi Beta
2. Jika diketahui waktu maksimum penyelesaian suatu proyek berdistribusi beta dengan α = 3 dan β = 1, maka peluang waktu penyelesaian paling sedikit 0,7=……….
3. Jika X peubah acak berdistribusi beta dengan parameter α = 1 dan β = 4, maka fdp dari X=…, Rata-rata= …………….., ragam = …

DAFTAR PUSTAKA

Ronald E Walpole & Raymond H Meyers. (1995). *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan.* Bandung: ITB.

Ross, S. (1996). *Suatu Pengantar Ke Teori Peluang.* Bogor: Jurusan Statistika IPB Bogor.

Sahoo, P. (2017, Januari 19). *Probability & Mathematical Statistics.* Retrieved from www.math.louisville.edu/~pksaho01/teaching/Math662TB-09S.pdf: http://www.freetechbooks.com/prasanna-sahoo-a4475.html

Tirta, I. M. (2014). *Pengantar Statistika Matematika, Diktat Kuliah.* Jember: Unit Penerbit FMIPA Universitas Jember.

BAB VII

FUNGSI PEUBAH ACAK

Seringkali kita perlu menurunkan sebaran peluang dari fungsi satu peubah atau lebih.

Misalnya, andaikan X peubah acak diskrit dengan sebaran $f(x)$ dan andaikan lagi $Y=u(X)$ transformasi satu-ke-satu dari X ke Y. Kita ingin menentukan sebaran peluang dari Y.

7.1 Transformasi satu peubah acak

- Andaikan X suatu peubah acak diskret dengan distribusi peluang $f(x)$. Misalkan $Y = u(X)$ suatu transformasi satu-satu antara nilai X dan Y, sehingga persamaan $y = u(X)$ mempunyai jawaban tunggal untuk x dinyatakan dalam Y_i misalnya $x = w(y)$, maka distribusi peluang Y adalah $g(y) = f[w(y)]$.
- Andaikan X peubah acak kontinu dengan sebaran peluang $f(x)$ Misalkan $Y=u(X)$ menyatakan korespondensi satu-ke-satu antara X dengan Y sedemikian hingga persamaan $y=u(x)$ dapat diselesaikan secara unik untuk x dalam y, misalnya $x=w(y)$. Maka sebaran peluang dari Y adalah

$$g(y) = f[w(y)]|J|$$

dimana $J=w'(y)$ adalah *Jacobian* dari transformasi.

Contoh 1

Diketahui X adalah peubah acak geometrik dengan peluang $f(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$, dengan x = 1, 2, 3,... Tentukan distribusi peluang peubah acak $Y = X^2$

Penyelesaian :

Dari soal diketahui bahwa nilai x semuanya positif, transformasi antara nilai x dan y tersebut adalah satu, $y = x^2$ maka $x = \sqrt{y}$.

Jadi $$g(y) = f\left(\sqrt{y}\right) = \begin{cases} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{y}-1} & untuk\ y = 1,4,9,\cdots \\ 0 & untuk\ x\ lainnya \end{cases}$$

Contoh 2

Diketahui X peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{12} & untuk\, 1 < x < 5 \\ 0 & untuk\;\, x\; lainnya \end{cases}$$

Tentukan distribusi peluang peubah acak $Y = 2X - 3$

Penyelesaian:

Invers dari y = 2x-3 adalah $x = \dfrac{(y+3)}{2}$, sehingga diperoleh $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{2}$. Untuk $x = 1$, maka $y = 2 - 3 = -1$, sedangkan untuk x = 5, maka $y = 2(5) - 3 = 7$, dengan menggunakan transformasi di atas, diperoleh :

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{\frac{y+3}{2}}{12}\dfrac{1}{2} = \dfrac{y+3}{48} & Untuk\, -1 < y < 7 \\ 0 & Untuk\; y\; lainnya \end{cases}$$

7.2 Transformasi Peubah Acak Gabungan

- **Peubah Acak gabungan diskrit**

Misalkan X_1 dan X_2 peubah acak diskret dengan distribusi peluang gabungan $f(x_1,x_2)$. Misalkan lagi $Y_1 = u_1(X_1, X_2)$ dan $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$ merupakan suatu transformasi satu-satu antara himpunan titik (X_1, X_2) dan (y_1, y_2), sehingga persamaan $y_1 = u_1\,(x_1, x_2)$ dan $y_2 = u_2\,(x_1, x_2)$ mempunyai jawaban tunggal untuk x_1 dan x_2 dinyatakan dalam y_1 dan y_2. Misalnya $x_1 = w_1(y_1,y_2)$ dan $x_2 = w_2(y_1,y_2)$, maka distribusi peluang gabungan y_1 dan y_2 adalah $g(y_1,y_2) = f[w_1(y_1,y_2), w_2(y_1,y_2)]$.

Peubah Acak gabungan Kontinu

Misalkan X_1 dan X_2 peubah acak kontinu dengan distribusi peluang gabungan $f(x_1,x_2)$. Misalkan lagi $y_1 = u_1(X_1,X_2)$ dan $Y_2 = U_2(X_1,X_2)$ merupakan suatu transformasi satu-satu antara himpunan titik (x_1,x_2) dinyatakan dalam y_1 dan y_2. Misalnya $x_1 = w_1(y_1,y_2)$ dan $x_2 = w_2(y_1,y_2)$, maka distribusi peluang gabungan y_1 dan y_2 adalah $g(y_1,y_2) = f[w_1(y_1,y_2), w_2(y_1,y_2)]J$. Dengan Jacobi adalah determinan 2x2, yaitu :

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

Contoh 3

Diketahui X1 dan X2 peubah acak saling bebas dengan fkp

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} e^{-x_1} & untuk\ x_1 > 0 \\ 0 & untuk\ x_1\ yang\ lain \end{cases}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 2x_2 & untuk\ 0 < x_2 < 1 \\ 0 & untuk\ x_2\ yang\ lain \end{cases}$$

Tentukan fkp dari $Y_1 = X_1 + X_2$

Penyelesaian

$$fkp\ bersama\ dari\ X_1\ dan\ X_2$$

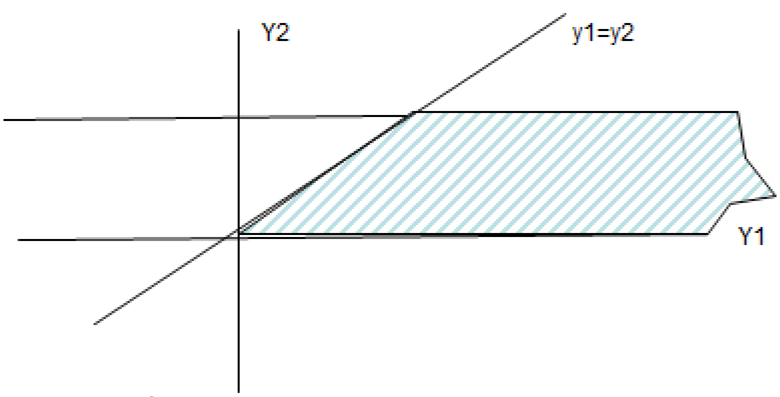
$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = 2e^{-x_1}x_2 \qquad x_1 > 0, 0 < x_2 < 1$$

$$Y_1 = X_1 + X_2 \quad Y_2 = X_2$$

$$x_1 = y_1 - y_2 \quad x_2 = y_2$$

Daerah batas untuk Y1 dan Y2

x1>0 , 0< x2 <1 maka y1-y2 > 0 dan 0<y2<1



$$3)\ Transformasi\ Jacobian$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Fkp bersama dari Y1 dan Y2

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(y_1 - y_2.y_2)|J|$$
$$= 2e^{-(y_1-y_2)}y_2.1$$

fungsi peluang marginal $f_{Y_1}(y_1)$

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{y_2} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)dy_2$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^{y_1} 2e^{-(y_1-y_2)}y_2 \, dy_2 \quad untuk\ 0 < y_1 < 1$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^{1} 2e^{-(y_1-y_2)}y_2 \, dy_2 \quad untuk\ y_1 > 1$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} 2(e^{-y_1} + y_1 - 1) & untuk\ 0 < y_1 < 1 \\ 2e^{-y_1} & untuk\ y_1 > 1 \\ 0 & untuk\ y_1\ yang\ lain \end{cases}$$

Dengan cara yang sama dapat dihitung fungsi peluang marginal $f_{Y_2}(y_2)$

Lembar kerja Mahasiswa

1. Misalkan *X* peubah acak dengan fungsi peluang

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & Untuk\ x=1,2,3 \\ 0, & Untuk\ x\ lainnya. \end{cases}$$

   a. tentukan fungsi peluang peubah acak Y=X+1
   b. tentukan fungsi peluang peubah acak $Y = X^2 + 1$
   c. tentukan fungsi peluang peubah acak $Y = 2X - 1$

2. Jika X peubah acak dengan fungsi peluang f(x) = 2x untuk 0 < x < 1, dan Y = 2X, tentukan
   1. fungsi peluang dari Y = 2X
   2. fungsi peluang dari Z = X+2

3. Misalkan X ~ Bin(n,3/4).
   a. tentukan fungsi peluang peubah acak $Y=3X$
   b. tentukan fungsi peluang peubah acak $Y=2X+1$

4. Diketahui Peubah acak X berdistribusi poisson

a. Jika Y = ½ X – 3, tentukan fungsi peluang dari Y

b. Jika Z=X+1, tentukan fungsi peluang Z

5. Fungsi kepekatan peluang peubah acak X dinyatakan sbb:

x	—2	—1	0	1	2	3	4
f(x)	1/10	2/10	1/10	1/10	1/10	2/10	2/10

a. Tentukan fungsi kepekatan peluang peubah acak Y = X^2

b. Tentukan fungsi kepekatan peubah acak Z=2X-1

6. Diketahui peubah acak X_1 dan X_2 dengan fungsi peluang bersama

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = e^{-(x_1+x_2)} \; untuk \; x_1 > 0, x_2 > 0$$

Tentukan fungsi peluang bersama dan f.peluang masing – masing

$Y_1 = X_1 + X_2 \qquad Y_2 = X_1 - X_2$

7. Tentukan fungsi pembangkit momen untuk peubah acak binomial X dan gunakan untuk membuktikan $\mu = np$ dan $\sigma^2 = npq$

DAFTAR PUSTAKA

Ronald E Walpole & Raymond H Meyers. (1995). *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan.* Bandung: ITB.

Sahoo, P. (2017, Januari 19). *Probability & Mathematical Statistics.* Retrieved from www.math.louisville.edu/~pksaho01/teaching/Math662TB-09S.pdf: http://www.freetechbooks.com/prasanna-sahoo-a4475.html